Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Lineaire Algebra
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

1. a $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right)$ (Gaussische eliminatie)

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha-3 & \beta-2 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & \beta-4 \end{array}\right)$

5/5 Er zijn oneindig veel oplossingen als er een vrije variabele ontstaat. Hiervoor moet de laatste rij een nulrij worden.

~~[illegible]~~

Dan moet $\alpha = 5$ en $\beta = 4$ zijn.

b. Als het stelsel strijdig, betekent dat dat er geen oplossing te vinden valt. Dit is het geval ~~als~~ ~~betekent~~ als $\alpha - 5 = 0$ en $\begin{cases} \beta \in \mathbb{R} \\ \beta - 4 \neq 0 \end{cases}$

5/5 Dat betekent namelijk dat met alle variabelen nul, er toch een getal als uitkomst staat. (Daarom mag $\beta - 4$ niet nul zijn, want dan heb je wel een uitkomst)
Het stelsel is dus strijdig, als

$\alpha = 5$ en $\begin{cases} \beta \in \mathbb{R} \\ \beta \neq 4 \end{cases}$

c. Het stelsel heeft precies één oplossing als het in strikte driehoeksvorm staat.

5/5 ~~Dit gebeurt als~~ ~~$\alpha \neq 5$ ... anders~~

Dit gebeurt als $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha - 5 \neq 0 \end{cases}$ (anders vrije variabele of inconsistent) en ~~β~~ $\beta \in \mathbb{R}$ (als $\beta - \frac{\alpha-5}{\cancel{4}} = 0$, ~~kan~~ moet ~~$x_3$~~ $=0$ ~~gekozen worden~~ zijn, wat ook leidt tot een stricte driehoeksvorm). namelijk $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$?

Dus het stelsel heeft precies een oplossing als

$\alpha \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \neq 5 \end{cases}$ en $\beta \in \mathbb{R}$

d. Als $\alpha = 6$ en $\beta = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Gaussische eliminatie $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Dan terugsubstititutie

$x_3 = 0$

5/5 $x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow (x_3 = 0) \Rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \ (x_3 = 0, x_2 = 1)$

$\Rightarrow x_1 + 1 = 2$

$x_1 = 1$

Dus $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ en x_3 0.

2. a. Dit betekent dat de matrix A door een eindig aantal elementaire rij-operaties omgezet kan worden in de matrix B en vice versa.

3/3

b. Het uitvoeren van een eindig aantal rij-operaties is hetzelfde als een eindig aantal elementaire matrices op A laten werken.

~~Dus A ≠ B~~

A is rij-equivalent met B

$\Rightarrow$ ~~A~~ $A = (E_k E_{k-1} \dots E_1)$ ~~B~~ AB

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Lineaire algebra
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

(vervolg 2b) A rij-equivalent $\Rightarrow A = E_k E_{k-1} \dots E_1 B$

Elementaire matrices zijn echter (per definitie) non-singulier en hebben dus een inverse.

Dus $(E_k E_{k-1} \dots E_1)^{-1} A = (E_k E_{k-1} \dots E_1)^{-1} (E_k E_{k-1} \dots E_1) B$

2/4 $(E_k E_{k-1} \dots E_1)^{-1} A = B$

De inverses van elementaire matrices zijn echter ook elementaire matrices, dus A is te verkrijgen door een eindig aantal elementaire matrices op B te laten werken. Dus B is rij-equivalent met A. $\boxtimes$

c. A rij-equivalent met B $\Rightarrow A = E_k E_{k-1} \dots E_1 B$
en B rij-equivalent met C $\Rightarrow B = E_n E_{n-1} \dots E_1 C$

We kunnen B substitueren in de tweede vergelijking

4/4 $\Rightarrow A = (E_n E_{n-1} \dots E_1) E_k E_{k-1} \dots E_1 C$

Een eindig aantal elementaire rij operaties vermenigvuldigd met een andere eindig aantal elementaire rij-operaties blijft een eindig aantal elementaire rij-operaties.
Dus C is te verkrijgen door een eindig aantal rij-operaties op A te laten werken, dus [illegible] A is rij-equivalent met C. $\boxtimes$

Lees definitie row-equivalent nog eens door.

d. m = n. Dit betekent dat zowel A als B vierkante n×n matrices zijn.
Als A en B niet-singulier zijn betekent dat de rij-echelonvorm in strikte driehoeksvorm staat. Als dit niet zo was en er een nulrij zou zijn, en n×n matrices ~~daar heeft Ax=0 meer oplossingen dan […] A~~ dan zouden A en B singulier zijn (geen inverse). Tegenspraak! A en B zijn ~~[…]~~ niet-singulier,

dus er kan geen nulrij in de rij-echelonvorm van een $n \times n$ matrix zitten.
De matrixes A en B zijn dus in stricte driehoeksvorm.
Deze kunnen zo omgeschreven worden door elementaire matrices dat er alleen enen op de diagonalen staan. Daarna kan deze rij-echelon vorm weer teruggebracht worden op 'reduced row echelon form'. Deze 'reduced row echelon form' is de identiteitsmatrix (allemaal enen op diagonalen).
Dus A is rij-equivalent met I en B is rij-equivalent met I.
~~Hieruit volgt dat A en B rij-equivalent zijn~~

$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I \Rightarrow I = (E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} A$

$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$

4/4 $\Rightarrow B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 (E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} A.$

En omgekeerd hetzelfde.

Dus A en B zijn rij-equivalent. $\boxed{\times}$

3. $A \cdot (\mathrm{adj}(A)) = \det(A) \cdot I$

$$A \cdot \left(\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}\right) = I$$

$$\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1}$$

ook kan $(A|I) \to (I|A^{-1})$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

naar 2de kolom

10/10 $$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 3 \cdot (6-5) = 3$$

$$\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Lineaire Algebra
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

4. a. Te bewijzen M niet-singulier $\Leftrightarrow$ C niet-singulier

$$M = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & B & I \end{pmatrix}$$

waarom?

($\Rightarrow$) M is niet singulier. $\det(C)\cdot\det(I)\cdot\det(I)$

De determinant van M is ~~...~~

$\Rightarrow$ ~~...~~ C

M is niet-singulier dus $\det(M) \neq 0$

~~...~~

$\Rightarrow \det(C)\cdot\det(I)\cdot\det(I) \neq 0$

$\det(I) = 1$

Dus geldt $\det(C) \neq 0$

~~Dat~~ Dus is C niet-singulier.

8/10

($\Leftarrow$) C is niet-singulier.

De determinant van $M = \det(C)\cdot\det(I)\cdot\det(I)$

C is niet-singulier dus $\det(C) \neq 0$

Verder $\det(I) = 1$

$\Rightarrow \det(M) = \det(C) \neq 0$

Dus $\det(M) \neq 0$.

Dan is M niet-singulier.

$\boxtimes$

b. C niet-singulier dus M niet-singulier dus M heeft een inverse.

5/5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} C & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & B & I & 0 & 0 & I \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & B & I & 0 & 0 & I \end{array}\right)$$

C is niet-singulier dus $CC^{-1} = I = C^{-1}C$

(N.B $\begin{matrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{matrix}$ is ook ~~...~~ identiteitsmatrix, omdat in de I-blokken ook allemaal enen op de diagonalen staan)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -B & I \end{array}\right)$$

Het rechter gedeelte is de inverse.

~~...~~

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -B & I \end{pmatrix}$$

5. a. ~~det(A)~~ Ik determineer naar de 1ste rij.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix}$$

5/5

$$\det(A) = x \cdot (x \cdot x - 1) - 1 \cdot (x - 1) + (1) \cdot (-1 + x)$$
$$= x^3 - x - x + 1 - 1 + x$$
$$= x^3 - x$$

b. Als A is singulier, geldt $\det(A) = 0$

~~Dus dat~~ $\Rightarrow x^3 - x = 0$

5/5

$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 1$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

$\Rightarrow$ A is singulier voor $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

6. a. ~~Als~~ $x \in S$.

Dan $\alpha x \in S$ $\quad x_{ji} = -x_{ij} \Rightarrow \alpha x_{ji} = -\alpha x_{ij}$

Want $\alpha x^T = -\alpha x \in S$, omdat de grootte van de matrix niet verandert bij scalar vermenigvuldiging. dus nog steeds $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$

~~A~~ $x, y \in S$

2/6

$(\alpha A^T) = \alpha(A^T) = \alpha(-A) = -\alpha A$

Dan $x + y \in S \Rightarrow x^T = -x \quad y^T = -y$

Want $x^T + y^T = -x - y \in S$; omdat de grootte vd matrix niet verandert ~~blijft nxn~~ bij $-x-y$.

$x^T + y^T = -x - y = -(x+y) \in S$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T = -A + -B = -(A+B)$

b. $n = 2 \Rightarrow S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = -A\}$

Dit zijn dus matrices ~~van de vorm waarvoor geldt~~

3/6

$a_{ji} = -a_{ij}$

als $i = j$, dan $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0$

$a_{ii} = 0$

Dus de matrices zien er als volgt uit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Lineaire Algebra
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

vervolg 6b

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

De vectoren die ~~deze ruimte~~ S opspannen zijn dus

$x = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

~~Deze vectoren zitten in S en zijn lineair onafhankelijk.~~

x en y zijn lin. afh.

Neem $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

c $n = 2 \Rightarrow S = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = -A \}$

2/6

De dimensie van S is het aantal lineaire onafhankelijke vectoren waardoor de deelruimte wordt opgespannen. Omdat S door 2 vectoren wordt opgespannen ~~geldt~~ is de dimensie van S 2.

$\Rightarrow \dim(S) = \cancel{2}\ 1$